

# CAPITULO

# 6

## MEDIDAS DE POSICIÓN

Las medidas de posición equivalen a los valores que puede tomar una variable caracterizados por agrupar a cierto porcentaje de observaciones en la muestra o población.

Las medidas de posición son ideales para obtener información adicional a partir de datos resumidos, es decir, que presentan pérdida de información por agrupamiento en intervalos de clase.

# CAPITULO 6: MEDIDAS DE POSICIÓN



**Medidas de posición:** Son indicadores estadísticos que muestran la frecuencia acumulada hasta un valor  $k$  cualquiera.

En este capítulo analizaremos tres medidas de posición:

- ♦ Percentiles
- ♦ Deciles
- ♦ Cuartiles

Es necesario revisar nuevamente el concepto de interpolación, ya que la base de estos indicadores es encontrar el valor de la variable a partir de un porcentaje de datos acumulados, de forma similar como se hizo con la mediana.

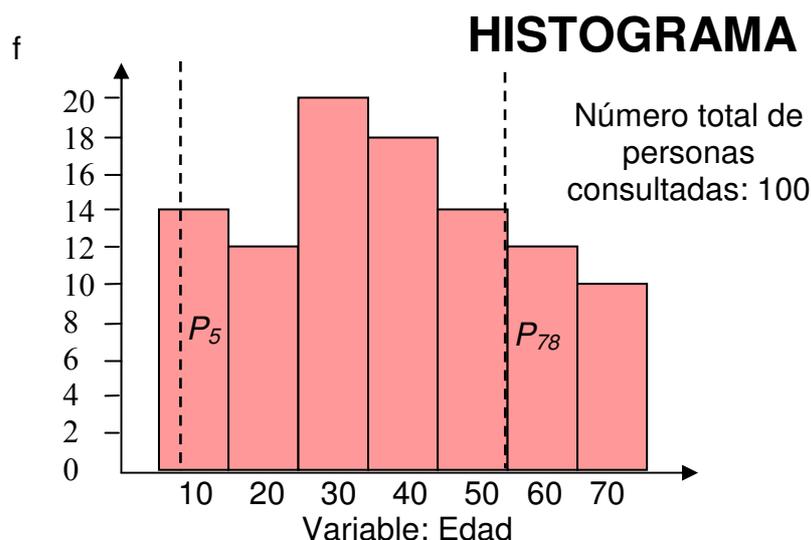
## 6.1 PERCENTILES

Los percentiles representan los valores de la variable que están por debajo de un porcentaje, el cual puede ser un valor de 1% a 100% (en otras palabras, el total de los datos es dividido en 100 partes iguales).

La notación empleada será:

$$P_k$$

Donde  $k$  es equivalente al porcentaje de datos acumulados, y  $P_k$  es el valor de la variable que representa dicho porcentaje. Por ejemplo,  $P_5$  es el valor de la variable que deja por debajo el 5% de los datos.  $P_{78}$  será entonces el valor que agrupa el 78% de los datos.



Podemos concluir que  $P_{50}$  sería el valor que divide en dos parte iguales la cantidad de datos de la muestra o población siendo equivalente a la mediana.

$$P_{50} = Me$$

Traslademos el gráfico de barra a su respectiva tabla de frecuencia y tratemos de localizar los Percentiles expuestos en el ejemplo:

Nc	Lm	Ls	f	F	h	H
1	[ 5	15)	14	14	14,00%	14,00%
2	[15	25)	12	26	12,00%	26,00%
3	[25	35)	20	46	20,00%	46,00%
4	[35	45)	18	64	18,00%	64,00%
5	[45	55)	14	78	14,00%	78,00%
6	[55	65)	12	90	12,00%	90,00%
7	[65	75]	10	100	10,00%	100,00%
<b>TOTAL</b>			<b>100</b>		<b>100,00%</b>	

Podemos concluir fácilmente (con ayuda de las frecuencias acumuladas), que 14 personas (14% del total) están por debajo de los 15 años (podemos aproximarlos a 15 años), lo cual representaría al percentil 14:

$$P_{14} = 15$$

El percentil 5 ( $P_5$ ) no puede ser calculado directamente, pero podemos concluir que dicho valor se encuentra en el primer intervalo, ya que este acumula el 14% de las personas. No ocurre lo mismo con el percentil 78 ( $P_{78}$ ) que aparece directamente en la tabla:

Nc	Lm	Ls	f	F	h	H
1	[ 5	15)	14	14	14,00%	14,00%
2	[15	25)	12	26	12,00%	26,00%
3	[25	35)	20	46	20,00%	46,00%
4	[35	45)	18	64	18,00%	64,00%
5	[45	55)	14	78	14,00%	78,00%
6	[55	65)	12	90	12,00%	90,00%
7	[65	75]	10	100	10,00%	100,00%
<b>TOTAL</b>			<b>100</b>		<b>100,00%</b>	

En el intervalo 5 se encuentra el percentil 78

$$P_{78} = 55$$

El 78% de las personas consultadas poseen una edad igual o inferior a los 55 años.

### 6.1.1 Ejemplo: Calculo de percentiles

A partir de la tabla de frecuencia anterior calcular el percentil 5 ( $P_5$ )

#### SOLUCIÓN

**PASO 1:** Localizar en cuál de los intervalos de clase se encuentra el percentil

Como se había mencionado, el percentil 5 se encuentra en el primer intervalo.

Nc	Lm	Ls	f	F	h	H
1	[ 5	15)	14	14	14,00%	14,00%
2	[15	25)	12	26	12,00%	26,00%
3	[25	35)	20	46	20,00%	46,00%
4	[35	45)	18	64	18,00%	64,00%
5	[45	55)	14	78	14,00%	78,00%
6	[55	65)	12	90	12,00%	90,00%
7	[65	75]	10	100	10,00%	100,00%
<b>TOTAL</b>			<b>100</b>		<b>100,00%</b>	

En el intervalo 1 se encuentra el percentil 5

**PASO 2:** Interpolar los datos para encontrar el percentil. En resumen tenemos que:

	Límite Superior	H
	15,00 ( $LS_1$ )	14,00% ( $H_1$ )
	5,00 ( $LS_0$ )	0,00% ( $H_0$ )
<b>Diferencia</b>	<b>10,00</b>	<b>14,00%</b>

En este caso, suponemos un intervalo adicional cuyo límite superior llamaremos  $LS_0$  equivalente a 5 el cual agrupa 0% de los datos. Entre los dos límites superiores abarcan un total de 14% de los datos. Si queremos llegar al 5% de los datos, debemos incrementar el porcentaje en una cantidad igual.

10,00	→	14,00%
Incremento	→	5,00%

$$\text{Incremento} = \frac{5,00\% \times 10,00}{14,00\%} = 3,57$$

Para llegar al 5% de los datos, el límite 5 se debe aumentar en 3,57 unidades.

$$P_5 = 5,00 + 3,57$$

$$P_5 = 8,57$$

### 6.1.2 La fórmula para calcular percentiles

El percentil  $k$  parte desde límite superior del intervalo anterior al que se encuentra dicho percentil más un incremento

$$P_k = L_{S_{i-1}} + \text{Incremento}$$

El incremento esta dado por:

$$P_k = L_{S_{i-1}} + A \cdot \frac{(k - H_{i-1})}{(H_i - H_{i-1})}$$

Simplificando aún más la fórmula tenemos:

$$P_k = L_{S_{i-1}} + A \cdot \frac{(k - H_{i-1})}{h_i}$$

Para expresar la fórmula en frecuencias absolutas tenemos que:

$$P_k = L_{S_{i-1}} + A \cdot \frac{(n \cdot k - F_{i-1})}{f_i}$$

Aplicando la fórmula al **ejemplo 6.1.1**, concluimos:

$$P_5 = 5 + 10,00 \cdot \frac{(5,00\% - 0,00\%)}{14,00\%} = 8,57$$

## 6.2 DECILES

Para los deciles, tomaremos el total de los datos divididos en 10 partes iguales, por tanto, existirán 10 deciles representado como  $D_k$

$D_1$  = Valor de la variable que agrupa el 10% de los datos.

$D_2$  = Valor de la variable que agrupa el 20% de los datos.

$D_3$  = Valor de la variable que agrupa el 30% de los datos.

$D_4$  = Valor de la variable que agrupa el 40% de los datos.

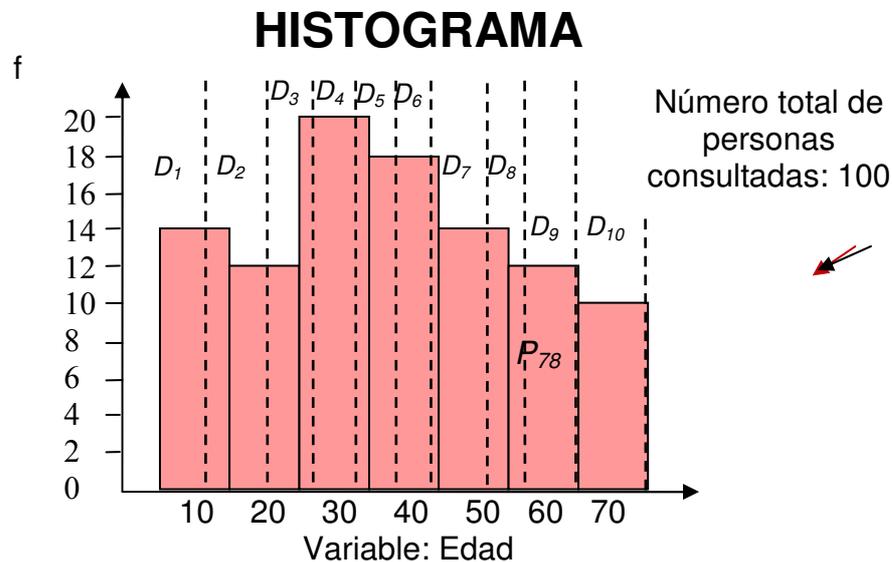
$D_5$  = Valor de la variable que agrupa el 50% de los datos.

$D_6$  = Valor de la variable que agrupa el 60% de los datos.

$D_7$  = Valor de la variable que agrupa el 70% de los datos.

$D_8$  = Valor de la variable que agrupa el 80% de los datos.  
 $D_9$  = Valor de la variable que agrupa el 90% de los datos.  
 $D_{10}$  = Valor de la variable que agrupa el 100% de los datos.

Nuestro histograma con los deciles identificados quedaría como sigue:



Las equivalencias entre percentiles y deciles son:

$$\begin{aligned}
 P_{10} &= D_1 \\
 P_{20} &= D_2 \\
 P_{30} &= D_3 \\
 P_{40} &= D_4 \\
 P_{50} &= D_5 = Me \\
 P_{60} &= D_6 \\
 P_{70} &= D_7 \\
 P_{80} &= D_8 \\
 P_{90} &= D_9 \\
 P_{100} &= D_{10}
 \end{aligned}$$

### 6.2.1 Ejemplo: Calculo de deciles

A partir de la tabla de frecuencia dada para ejemplificar los percentiles, encontrar el decil 2.

## SOLUCIÓN

**PASO 1:** Localizar en cuál de los intervalos de clase se encuentra el decil

El Decil 2 se encuentra en el segundo intervalo, ya que este almacena hasta el 26% de los datos.

Nc	Lm	Ls	f	F	h	H
1	[ 5	15)	14	14	14,00%	14,00%
2	[15	25)	12	26	12,00%	26,00%
3	[25	35)	20	46	20,00%	46,00%
4	[35	45)	18	64	18,00%	64,00%
5	[45	55)	14	78	14,00%	78,00%
6	[55	65)	12	90	12,00%	90,00%
7	[65	75]	10	100	10,00%	100,00%
<b>TOTAL</b>			<b>100</b>		<b>100,00%</b>	

En el intervalo 2 se encuentra el decil 2

**PASO 2:** Interpolamos los datos para encontrar el decil. En resumen tenemos que:

	Límite Superior	H
	25,00 (Ls <sub>2</sub> )	26,00% (H <sub>2</sub> )
	15,00 (Ls <sub>1</sub> )	14,00% (H <sub>1</sub> )
<b>Diferencia</b>	<b>10,00</b>	<b>12,00%</b>

Entre los dos límites superiores abarcan un total de 12% de los datos. Si queremos llegar al 20% de los datos, debemos incrementar el porcentaje acumulado en Ls<sub>1</sub> en un 6%

$$\begin{array}{lcl} 10,00 & \longrightarrow & 12,00\% \\ \text{Incremento} & \longrightarrow & 6,00\% \end{array}$$

$$\text{Incremento} = \frac{6,00\% \times 10,00}{12,00\%} = 5,00$$

Para llegar al 20% de los datos acumulados, el límite de 15,00 se debe aumentar en 6,25 unidades.

$$D_2 = 15,00 + 5,00$$

$$D_2 = 20,00$$

## 6.2.2 La fórmula para calcular deciles

El decil  $k$  parte desde límite superior del intervalo anterior al que se encuentra dicho decil más un incremento

$$D_k = L_{s_{i-1}} + \text{Incremento}$$

El incremento esta dado por:

$$D_k = L_{s_{i-1}} + A \cdot \frac{(10\% \cdot k - H_{i-1})}{h_i}$$

Para expresar la fórmula en frecuencias absolutas tenemos que:

$$D_k = L_{s_{i-1}} + A \cdot \frac{(10\% \cdot n \cdot k - F_{i-1})}{f_i}$$

Aplicando la fórmula al **ejemplo 6.2.1**, concluimos:

$$D_2 = 15,00 + 10,00 \cdot \frac{(20,00\% - 14,00\%)}{12,00\%} = 20,00$$

## 6.3 CUARTILES

Para los deciles, tomaremos el total de los datos divididos en 4 partes iguales. Denotaremos el cuartil como  $Q_k$ .

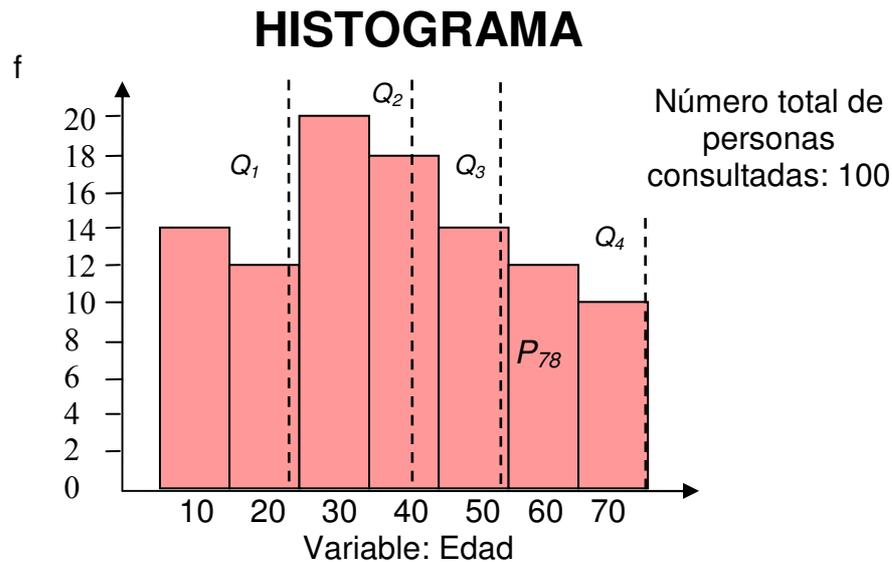
$Q_1$  = Valor de la variable que agrupa el 25% de los datos.

$Q_2$  = Valor de la variable que agrupa el 50% de los datos.

$Q_3$  = Valor de la variable que agrupa el 75% de los datos.

$Q_4$  = Valor de la variable que agrupa el 100% de los datos.

El histograma de ejemplo con los cuartiles identificados quedaría como sigue:



Las equivalencias entre percentiles, deciles y cuartiles son:

$$P_{25} = Q_1$$

$$P_{50} = D_5 = Q_2 = Me$$

$$P_{75} = Q_3$$

$$P_{10} = D_{10} = Q_4$$

### 6.3.1 Ejemplo: Calculo de cuartiles

Calcular el cuartil 3.

#### SOLUCIÓN

**PASO 1:** Localizar en cuál de los intervalos de clase se encuentra el cuartil.

El Cuartil 3 se encuentra en el quinto intervalo, ya que este almacena hasta el 78% de datos.

Nc	Lm	Ls	f	F	h	H
1	[ 5	15)	14	14	14,00%	14,00%
2	[15	25)	12	26	12,00%	26,00%
3	[25	35)	20	46	20,00%	46,00%
4	[35	45)	18	64	18,00%	64,00%
5	[45	55)	14	78	14,00%	78,00%
6	[55	65)	12	90	12,00%	90,00%
7	[65	75]	10	100	10,00%	100,00%
<b>TOTAL</b>			<b>100</b>		<b>100,00%</b>	

En el intervalo 5 se encuentra el cuartil 3

**PASO 2:** Interpolar los datos para encontrar el cuartil. En resumen tenemos que:

	<b>Límite Superior</b>	<b>H</b>
	55,00 (L <sub>S5</sub> )	78,00% (H <sub>5</sub> )
	45,00 (L <sub>S4</sub> )	64,00% (H <sub>4</sub> )
<b>Diferencia</b>	<b>10,00</b>	<b>14,00%</b>

Entre los dos límites superiores abarcan un total de 14% de los datos. Si queremos llegar al 75% de los datos, debemos incrementar el porcentaje acumulado en L<sub>S4</sub> en un 11%

10,00	→	14,00%
Incremento	→	11,00%

$$\text{Incremento} = \frac{11,00\% \times 10,00}{14,00\%} = 7,86$$

Para llegar al 20% de los datos acumulados, el límite de 45,00 se debe aumentar en 7,86 unidades.

$$Q_3 = 45,00 + 7,86$$

$$Q_3 = 52,86$$

### 6.3.2 La fórmula para calcular cuartiles

El cuartil  $k$  parte desde límite superior del intervalo anterior al que se encuentra dicho decil más un incremento

$$Q_k = L_{S_{i-1}} + \text{Incremento}$$

El incremento esta dado por:

$$Q_k = L_{S_{i-1}} + A \cdot \frac{(25\% \cdot k - H_{i-1})}{h_i}$$

Para expresar la fórmula en frecuencias absolutas tenemos que:

$$Q_k = L_{S_{i-1}} + A \cdot \frac{(25\% \cdot n \cdot k - F_{i-1})}{f_i}$$

Aplicando la fórmula al **ejemplo 6.3.1**, concluimos:

$$Q_3 = 45,00 + 10,00 \cdot \frac{(75,00\% - 64,00\%)}{14,00\%} = 52,86$$

## 6.4 APLICACIÓN DE PERCENTILES Y CUARTILES EN EXCEL



MS Excel dispone de las funciones **PERCENTIL** y **CUARTIL** creadas para determinar estos indicadores de posición en datos no agrupados. Copiemos los siguientes datos sin agrupar en una nueva hoja de Excel.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		10,2	11,8	10,0	12,5	13,1	13,1	
3		15,1	10,9	19,5	14,4	12,4	17,1	
4		17,6	12,2	10,9	11,5	11,9	11,2	
5		10,9	14,4	13,2	17,4	11,8	17,9	
6		18,3	13,8	10,9	10,0	10,3	13,2	
7								
8								

Empleemos ahora la función **PERCENTIL** desde la celda B8 para calcular el percentil 48.



**PERCENTIL:** Calcula el percentil k de un conjunto de datos. (Siendo k un valor entre 0 y 1)

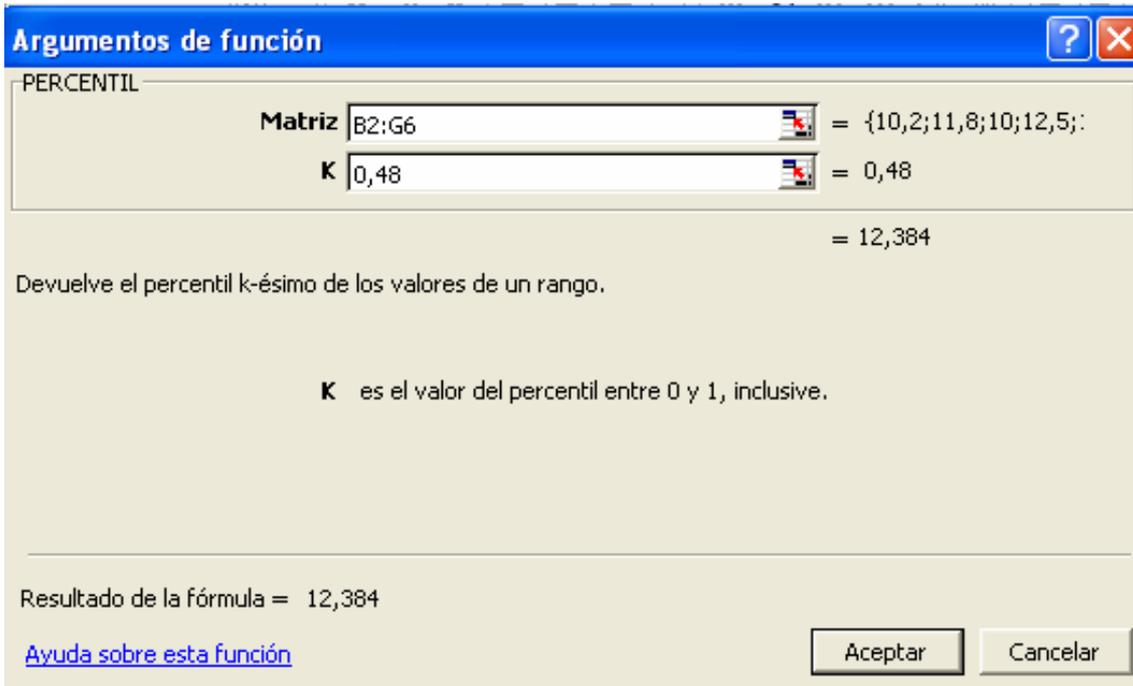
**Formato:** PERCENTIL(matriz;k)

**Categoría:** Estadística

Activemos la fórmula y señalemos en la casilla matriz los datos dados en el ejemplo.

The screenshot shows the 'Argumentos de función' dialog box for the PERCENTIL function. The 'Matriz' (Array) argument is set to 'B2:G6'. The spreadsheet data is visible in the background, with the range B2:G6 highlighted by a dashed border. The cell B8 is selected, and the formula bar shows '=PERCENTIL(B2:G6)'. The dialog box has a blue header and a white body with a blue border. There are question mark and close buttons in the top right corner of the dialog box.

En el valor k colocaremos 0,48 (ya que acepta valores de 0 a 1, siendo 1 el equivalente al 100% de los datos acumulados).

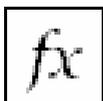


El percentil 48 es equivalente a 12,384.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		10,2	11,8	10,0	12,5	13,1	13,1	
3		15,1	10,9	19,5	14,4	12,4	17,1	
4		17,6	12,2	10,9	11,5	11,9	11,2	
5		10,9	14,4	13,2	17,4	11,8	17,9	
6		18,3	13,8	10,9	10,0	10,3	13,2	
7								
8		12,384						
9								
10								

← =PERCENTIL(B2:G6;0,48)

Para calcular los cuartiles emplearemos la función **CUARTIL** con parámetros parecidos a la función **PERCENTIL**, solo que k representa un valor del 1 al 4 (se incluye el 0 para identificar el valor mínimo de los datos).

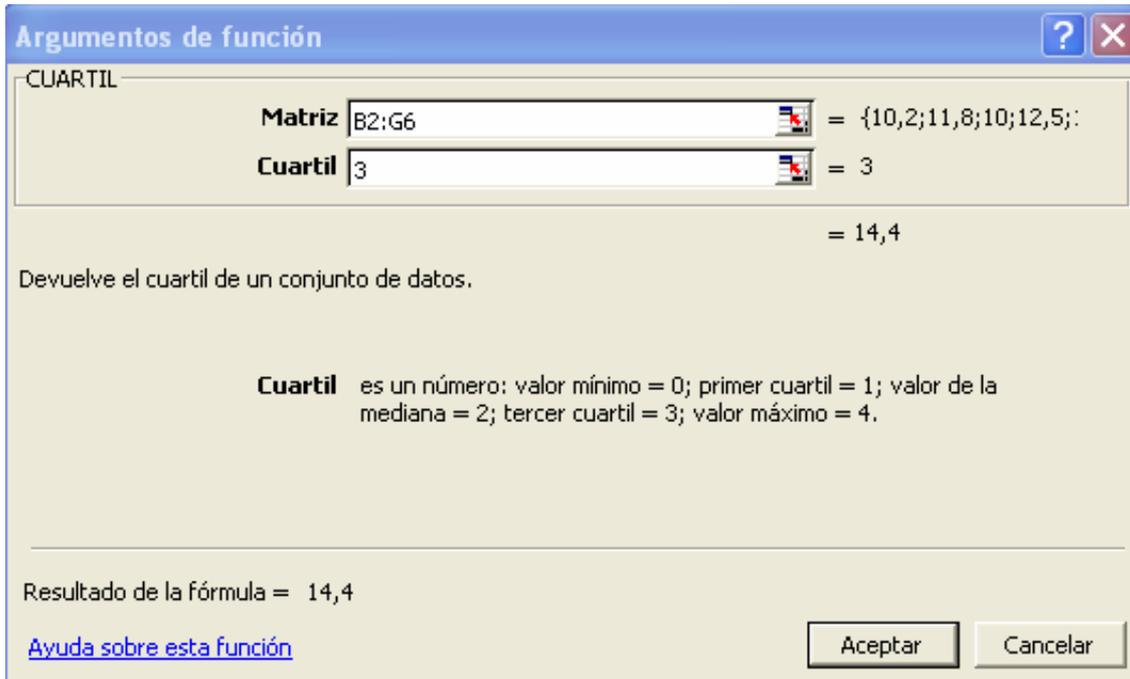


**CUARTIL:** Calcula el cuartil k de un conjunto de datos. (Siendo k un valor entre 0 y 4)

**Formato:** CUARTIL(matriz;cuartil)

**Categoría:** Estadística

Hallemos el cuartil 3, el cual el representa el 75% de los datos acumulados. Desde la celda B9 activemos la función señalando en la casilla matriz los datos del ejemplo. En la casilla cuartil escribiremos 3.



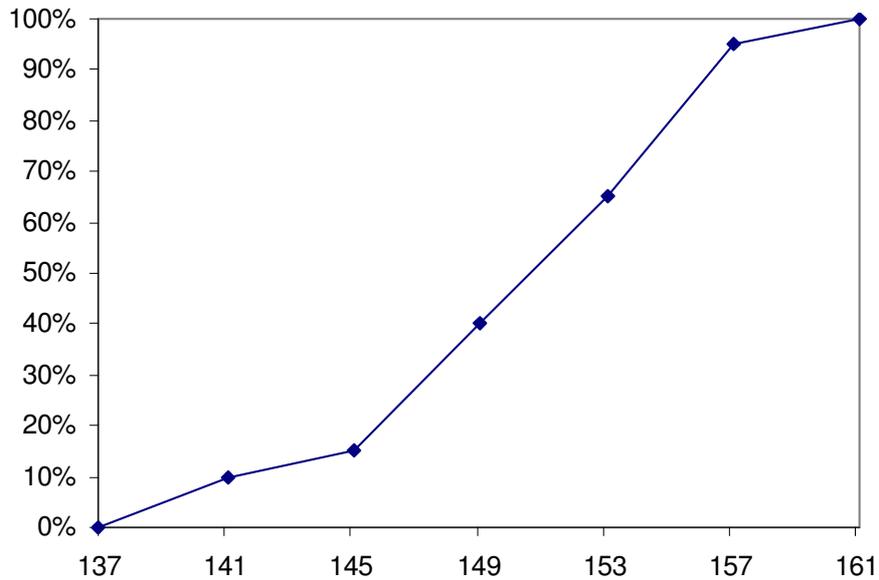
El valor resultante es 14,4.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		10,2	11,8	10,0	12,5	13,1	13,1	
3		15,1	10,9	19,5	14,4	12,4	17,1	
4		17,6	12,2	10,9	11,5	11,9	11,2	
5		10,9	14,4	13,2	17,4	11,8	17,9	
6		18,3	13,8	10,9	10,0	10,3	13,2	
7								
8		12,384						
9		14,4						
10								

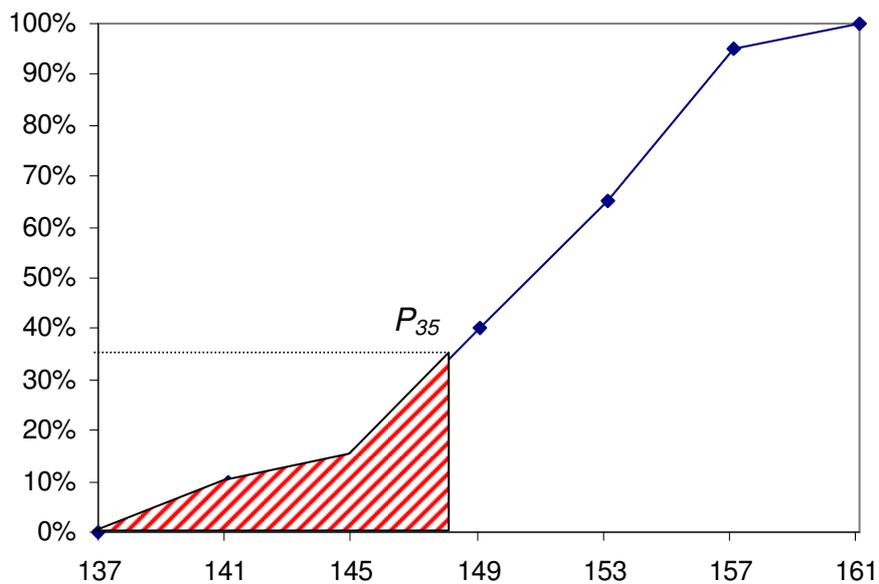
## 6.5 LAS MEDIDAS DE POSICIÓN Y EL GRÁFICO DE OJIVA

El gráfico de ojiva es ideal para mostrar las medidas de posición, ya que esta registra las frecuencias acumuladas, tanto absolutas como relativas. Analicemos la siguiente tabla de frecuencia con su respectivo gráfico de ojiva:

Nc	Lm	Ls	f	F	h	H
1	137.0	141.1	4	4	10,00%	10,00%
2	141.1	145.1	2	6	5,00%	15,00%
3	145.1	149.1	10	16	25,00%	40,00%
4	149.1	153.1	10	26	25,00%	65,00%
5	153.1	157.1	12	38	30,00%	95,00%
6	157.1	161.1	2	40	5,00%	100,00%
<b>TOTAL</b>			<b>40</b>	<b>100,00%</b>		



Grafiquemos el percentil 35 ( $P_{35}$ ) el cual equivale al valor de la variable de 147.5 (localizado en el intervalo 3). Ubicamos el 35% en el eje vertical y lo proyectamos al eje horizontal. El área debajo de la curva representa el 35% de los datos.



## 6.6 EJERCICIOS PROPUESTOS

6.6.1 A partir de la siguiente tabla de frecuencia calcular:

Nc	Lm	Ls	f	F	h	H
1	[12	15)	13	13	26,00%	26,00%
2	[15	18)	11	24	22,00%	48,00%
3	[18	21)	9	33	18,00%	66,00%
4	[21	24)	7	40	14,00%	80,00%
5	[24	27)	6	46	12,00%	92,00%
6	[27	30]	4	50	8,00%	100,00%
<b>TOTAL</b>			<b>50</b>		<b>100,00%</b>	

- Percentil 15
- Percentil 35
- Percentil 40
- Percentil 85
- Decil 2
- Decil 6
- Decil 8
- Cuartil 1
- Cuartil 2
- Cuartil 3

6.6.2 A partir de la siguiente tabla de frecuencia calcular:

Nc	Lm	Ls	f
1	15.50	21.81	30
2	21.81	28.11	35
3	28.11	34.41	20
4	34.41	40.71	5
5	40.71	47.01	10
<b>TOTAL</b>			<b>100</b>

- Mediana
- Percentil 33
- Decil 7
- Cuartil 3

6.6.3 Calcular la el percentil 17 y 47 a la tabla de frecuencia mostrada en el ejercicios 5.5.2.

**6.6.4** Calcular todos los deciles a partir de los siguientes datos:

10	15	21	20	23	5	14	15
33	21	29	19	5	14	25	25
30	15	1	26	32	22	30	15
28	27	14	16	21	22	39	34

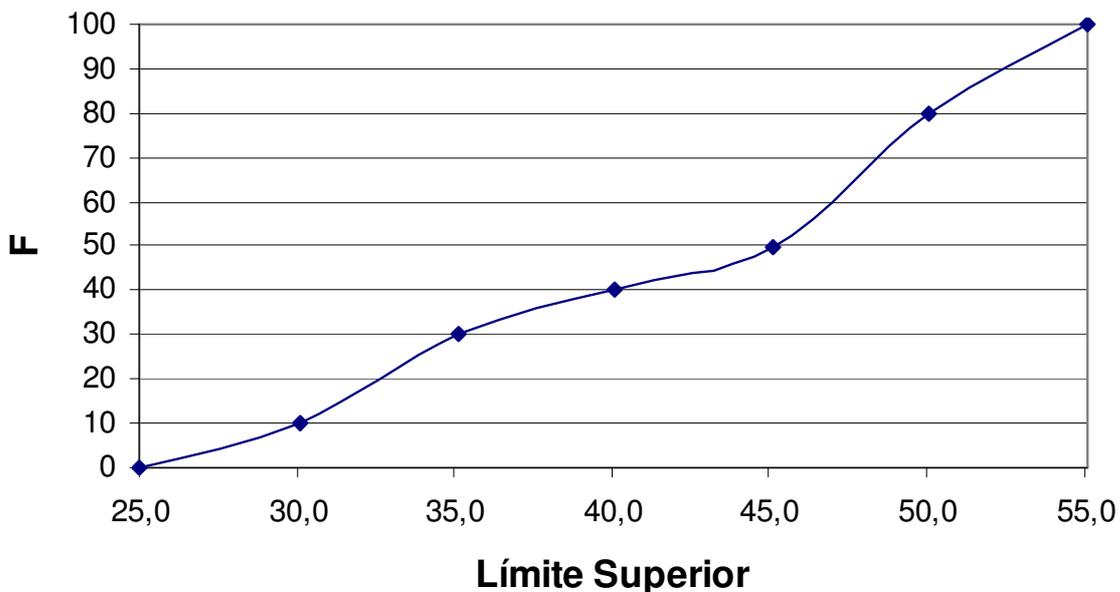
**6.6.5** La siguiente tabla muestra la distribución de frecuencia sobre los ingresos de los trabajadores de un cargo en particular de varias empresas del sector manufacturero (cifras dadas en miles de pesos).

Nc	Lm	Ls	f
1	[452	460)	37
2	[460	468)	23
3	[468	476)	13
4	[476	482)	8
5	[482	490)	7
6	[490	498]	2
<b>TOTAL</b>			<b>90</b>

- ¿Cuántas personas ganan menor de \$ 470.000?
- ¿Cuántas personas ganan menos de \$ 482.000?
- ¿Cuántas personas ganan más de \$ 460.000?

**6.6.6** Calcule y grafique el percentil 60 a partir del siguiente gráfico de ojiva (dado en el **ejercicio 4.4.6**):

## OJIVA



## 6.7 CUESTIONARIO DE REPASO

Selección Múltiple con Única Respuesta: Marque con una X la respuesta correcta.

1. ¿Cuál de las siguientes equivalencias entre las medidas de posición es correcta?

- A.  $P_{35} = D_3$
- B.  $P_{75} = Q_3$
- C.  $P_{50} = D_6$
- D.  $P_{75} = Q_4$

2. ¿Cuál de las siguientes equivalencias entre las medidas de posición es correcta?

- A.  $Me = P_{50} = D_2 = Q_2$
- B.  $Me = P_{50} = D_5 = Q_4$
- C.  $Me = P_{50} = D_5 = Q_2$
- D.  $Me = P_{50} = D_6 = Q_3$

3. Dada la siguiente relación entre límites superiores consecutivos y sus frecuencias relativas acumuladas:

12.5	—————▶	35,00%
16.5	—————▶	72,00%

El decil 7 corresponde a:

- A. 16,28
- B. 15,28
- C. 17,28
- D. Ninguna de las anteriores

4. Dada la siguiente relación entre límites superiores consecutivos y sus frecuencias relativas acumuladas:

11,0	—————▶	54,00%
14,0	—————▶	63,00%

Un valor en la variable de 13,00 corresponde a un porcentaje de:

- A. 55,00%
- B. 57,00%
- C. 60,00%
- D. Ninguna de las anteriores